Skärningskurva

Visa att villkoren $xyz + e^{2x} = y$ och $x + 3y - z = 1$ implicit definierar x och y som C^1-funktioner av z i någon omgivning av punkten $(0,1,2)$. Beräkna också $x(2)$, $y(2)$, $x'(2)$ och $y'(2)$. Bestäm slutligen kurvans tangentlinje i punkten.

Lösning: Vi är alltså intresserade av snittet (skärningskurvan) mellan nivåytorna $F(x,y,z) = 0$ och $G(x,y,z) = 1$ till skalärfälten F och G (som är av klassen C^1) definierade av

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= xyz + e^{2x} - y \\ G(x,y,z) &= x + 3y - z. \end{aligned}$$

Vi tittar i närheten av punkten $(0,1,2)$ som vi enkelt ser tillhör skärningskurvan. Enligt implicita funktionssatsen kan skärningskurvan parametriseras (via C^1-funktioner) av z om $\nabla F(0,1,2) \times \nabla G(0,1,2)$ har en nollskild z-komponent, och mycket riktigt är

$$\nabla F(x,y,z) \times \nabla G(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} yz + 2e^{2x} \\ xz - 1 \\ xy \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 - xz - 3xy \\ xy + yz + 2e^{2x} \\ 3yz + 6e^{2x} - xz + 1 \end{pmatrix}$$

(eftersom vi bara behöver z-komponenten *behöver* vi naturligtivs inte räkna ut de två andra) så att

$$\nabla F(0,1,2) \times \nabla G(0,1,2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

med z-komponenten $13 \neq 0$. Naturligtvis är $x(2) = 0$ och $y(2) = 1$. I vår omgivning har vi

$$\begin{cases} x(z)y(z)z + e^{2x(z)} - y(z) = 0 \\ x(z) + 3y(z) - z = 1 \end{cases}$$

och derivering m.a.p. z ger

$$\begin{cases} x'yz + xy'z + xy + 2x'e^{2x} - y' = 0 \\ x' + 3y' - 1 = 0. \end{cases}$$

Speciellt, i punkten $(0,1,2)$, har vi

$$\begin{cases} 4x'(2) - y'(2) = 0 \\ x'(2) + 3y'(2) = 1. \end{cases}$$

Detta är två ekvationer i två obekanta med lösningen

$$x'(2) = \frac{1}{13}, \qquad y'(2) = \frac{4}{13}.$$

En riktningsvektor till kurvan i $(0,1,2)$ är förstås $\nabla F(0,1,2) \times \nabla G(0,1,2) = (1,4,13)$ så att tangentlinjen kan parametriseras

$$(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,4,13).$$

(Alternativt är riktningsvektorn parallell med $\big(x'(2), y'(2), z'(2)\big) = (1/13\,, 4/13\,, 1)$.)