Uppgift 2.52

Bestäm konstanten C så att ytan $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C$ tangerar planet Π genom punkterna $(0, 1, 2)$, $(1, 3, 0)$ och $(5, -1, 1)$.

Lösning: Notera att ytan är en ellipsoid som ”växer” med ökande värden på C. Sätt $P \coloneqq (0, 1, 2)$, $Q \coloneqq (1, 3, 0)$ och $R \coloneqq (5, -1, 1)$. Då är vektorerna $\mathbf{u} \coloneqq R - P = (5, -2, -1)$ och $\mathbf{v} \coloneqq R - Q = (4, -4, 1)$ parallella med planet så att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-6, -9, -12) \parallel (2, 3, 4)$$

är en normalvektor till planet. Planet har därför ekvationen $2x + 3y + 4z = d$ för något $d \in \mathbb{R}$. Eftersom $P \in \Pi$ får vi $d = 11$ så att

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \quad 2x + 3y + 4z = 11\}.$$

Ytan är uppenbarligen nivåytan $F(x, y, z) = C$ till skalärfältet $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$ som har gradienten

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 6y, 8z).$$

Låt nu (a, b, c) vara en punkt där ytan tangerar Π. I den här punkten måste gradienten till skalärfältet vara parallell med planets normal $(2, 3, 4)$, eftersom gradienten är vinkelrät mot nivåytorna. Vi har därför

$$(2a, 6b, 8c) = \lambda(2, 3, 4)$$

för något tal λ. Detta är tre linjära ekvationer i fyra obekanta, så lösningen är en rät linje. Första ekvationen ger $a = \lambda$, andra ekvationen ger $b = \frac{1}{2}\lambda$ och tredje ekvationen ger $c = \frac{1}{2}\lambda$. Om vi sätter $t \coloneqq \frac{1}{2}\lambda$ har vi därför funnit lösningen

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som är en linje genom origo med riktningsvektorn $(2, 1, 1)$. Eftersom $(a, b, c) \in \Pi$ måste (a, b, c) uppfylla Π:s ekvation, så

$$2(2t) + 3t + 4t = 11$$

vilket ger $t = 1$. Därför är $(a, b, c) = (2,1,1)$. Vi har nu hittat tangeringspunkten mellan ytan och planet. Eftersom denna uppenbarligen tillhör ytan så måste den uppfylla ytans ekvation, d.v.s.

$$2^2 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 = C$$

vilket ger $C = 11$ och uppgiften är löst.

Svar: $C = 11$.