

Uppgift 6.18

Vi skall beräkna

$$\iiint_D (x^2 + y^2)z dx dy dz$$

där D är en cylinder med höjd 2, radie 3 och med z -axeln som symmetriaxel.

Lösning: Det finns oändligt många sådana cylindrar, eftersom de kan befinna sig på olika ställen längs z -axeln. Vi betraktar därför den cylinder som sträcker sig från $z = a$ till $z = a + 2$ för något $a \in \mathbb{R}$ (till varje $a \in \mathbb{R}$ svarar exakt en tänkbar cylinder, och varje tänkbar cylinder har precis ett a). Vi byter sedan från kartesiska koordinater (x, y, z) till cylindriska koordinater (r, φ, z) enligt

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z.\end{aligned}$$

Vår cylinder svarar då mot rätblocket $E := [0, 3] \times [0, 2\pi[\times [a, a + 2]$ i (r, φ, z) -rummet.

Funktionaldeterminantens belopp är r så därför är

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2 + y^2)z dx dy dz &= \iiint_E r^2 z \cdot r dr d\varphi dz = \int_0^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{a+2} z dz = \frac{81}{4} \cdot 2\pi \cdot 2(a + 1) = \\&= 81\pi(a + 1).\end{aligned}$$