

Uppgift 5.2

Deluppgift A

Vi skall beräkna kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} xy \\ y - x \end{pmatrix}$$

längs den räta linjen γ från $(0,0)$ till $(1,1)$. Den linjen är $\gamma = \mathbf{r}([0,1])$ där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0,1]$$

så att kurvintegralens värde ("arbetet") är

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} tt \\ t - t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Deluppgift B

Vi betraktar nu samma vektorfält men låter kurvan vara en del av en parabel i stället. Mer precist så är γ kurvan $x = y^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$. Den kurvan är $\gamma = \mathbf{r}([0,1])$ där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0,1]$$

så att kurvintegralens värde ("arbetet") är

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} t^2 \cdot t \\ t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^4 + t - t^2) dt = \frac{17}{30}.$$