Uppgift 6.25

Betrakta skalärfältet $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definierat av

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}, \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Inför också sfären

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}.$$

Vi skall beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ ut genom S.

Lösning: Notera att skalärfältet f:s nivåytor är sfärer kring origo! Det betyder att gradienten i varje punkt är vinkelrät mot en sådan sfär, och därmed pekar radiellt ut från origo. Det sammanfaller ju med S:s normal i varje punkt, vilket underlättar räkningarna väsentligt. [När man skall beräkna flöden underlättar det alltid om ytans normalriktning sammanfaller med vektorfältets riktning i varje punkt på ytan.]

Vi får

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \dfrac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \dfrac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-2}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

där $\hat{\mathbf{r}}$ är den vektor som i varje punkt har längd 1 och pekar radiellt ut från origo. Därför är flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \frac{-2}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA = \iint_S \frac{-2}{r^3}\, dA = \iint_D -\frac{2}{r^3} r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = -\frac{2}{r} \iint_D \sin\theta \, d\theta d\varphi =$$
$$= -\frac{2}{r} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{2}{r} \cdot 2 \cdot 2\pi = -\frac{8\pi}{r}.$$

Alternativ lösning: Det går ännu smidigare om vi börjar jobba med sfäriska koordinater redan från början. Då är $f(r,\theta,\varphi) = 1/r^2$ så att

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \nabla f(r,\theta,\varphi) = -\frac{2}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$$

och

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \frac{-2}{r^3}\,\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA = \cdots.$$