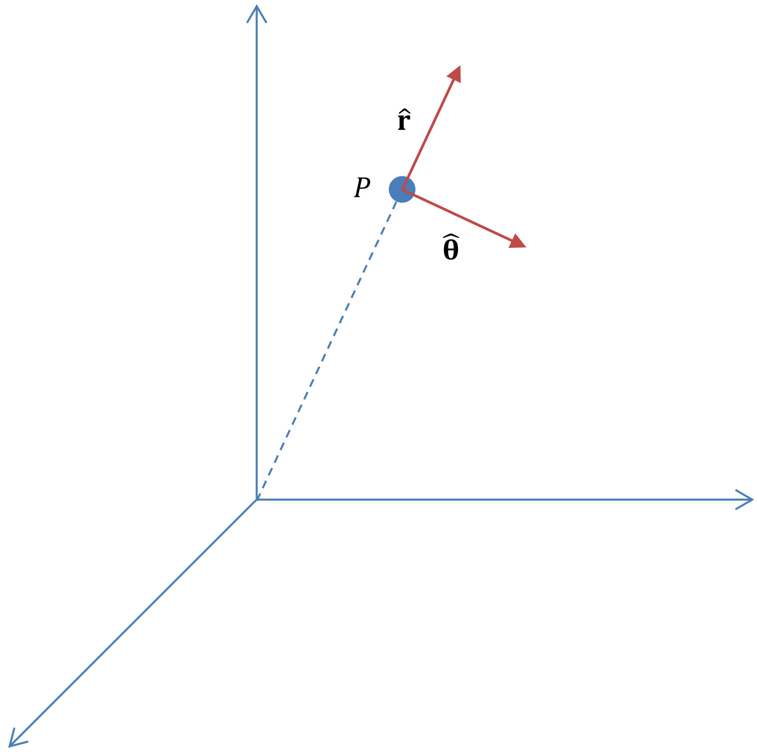
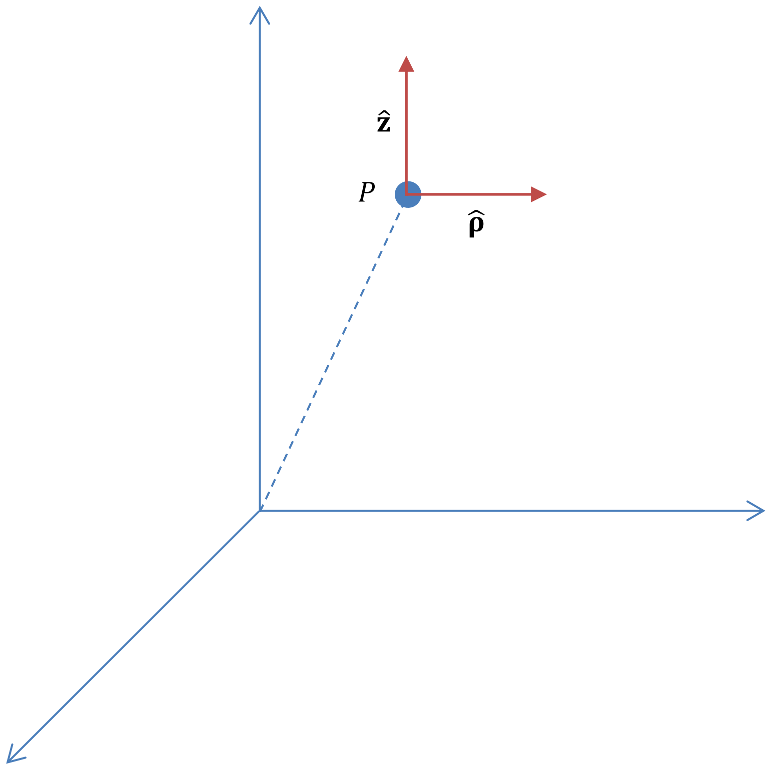
## Uppgift 9.2

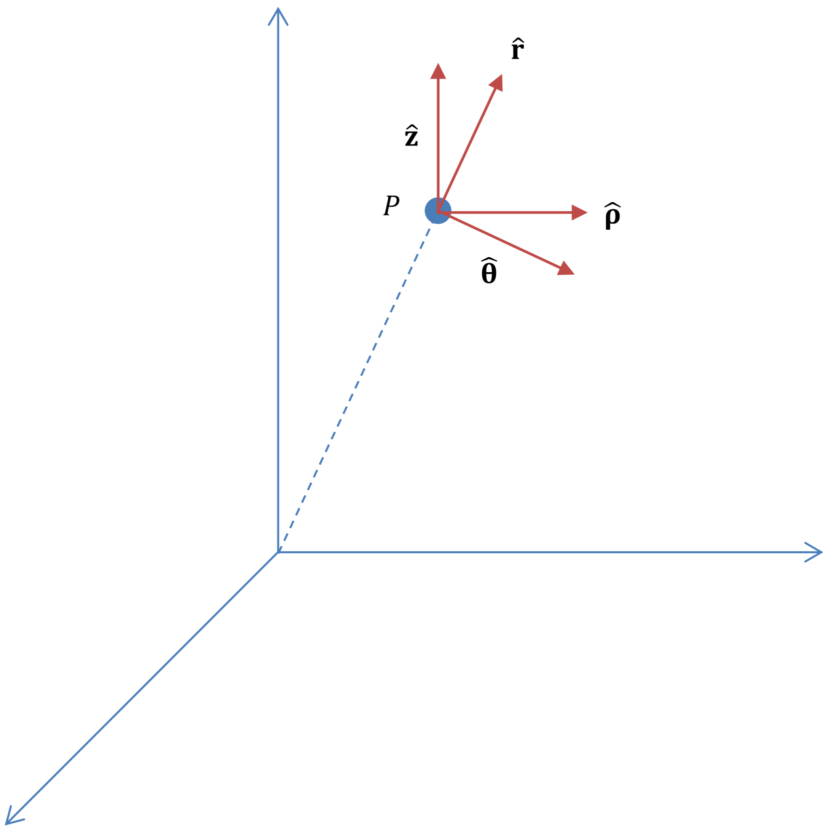
Låt $P \in \mathbb{R}^3$ vara en given punkt i rummet. I den här punkten har vi förstås de sfäriska basvektorerna $\hat{\mathbf{r}}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ och $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$. Låt oss rita de två första av dem:




I punkten $P$ har vi också de cylindriska basvektorerna $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$, $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ och $\hat{\mathbf{z}}$. Vi ritar två av dem:



Det är inte svårt att inse att de fyra vektorer vi ritat ligger i samma plan (nämligen planet $\varphi = $ konst.):



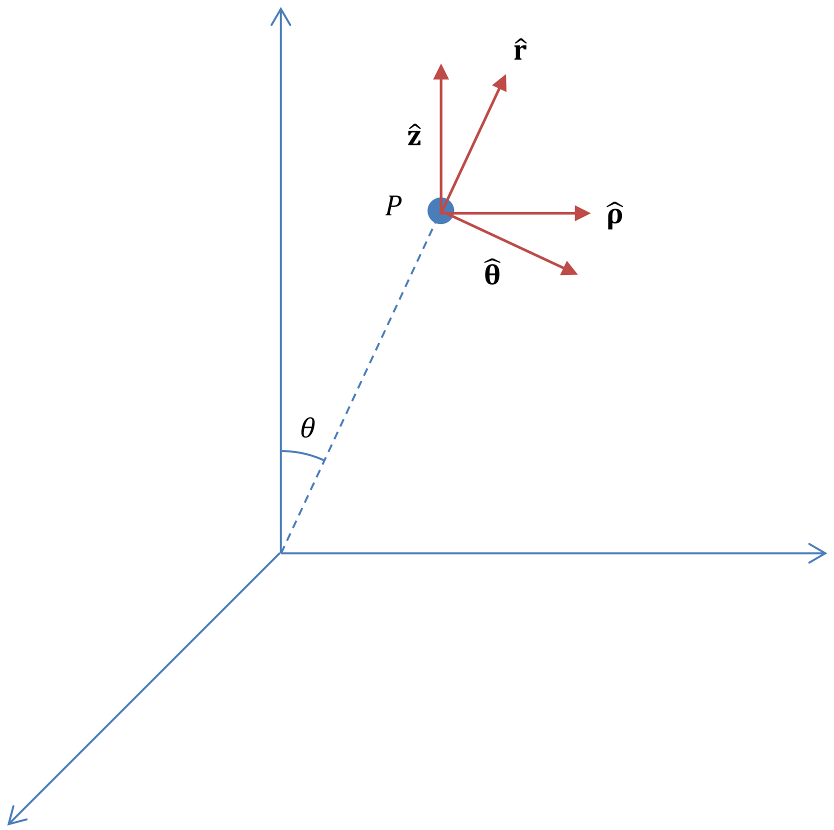

I det här planet kan sålunda de två sfäriska basvektorerna $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ fungera som bas (precis som vilket par av icke-parallella vektorer som helst). Vår uppgift är att bestämma komponenterna för de cylindriska basvektorerna $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ och $\hat{\mathbf{z}}$ i denna bas:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = a\hat{\mathbf{r}} + b\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\hat{\mathbf{z}} = c\hat{\mathbf{r}} + d\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Eftersom $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ är en ON-bas kommer vi ihåg från linjär algebra att komponenterna är skalärprodukter, d.v.s.

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \left(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Eftersom alla vektorerna har längd 1 är skalärprodukterna bara lika med cosinus för vinkeln mellan vektorerna. För att bestämma dessa vinklar kan följande bild vara av hjälp, där vi markerat den sfäriska koordinaten $\theta$.




Vinkeln mellan $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\mathbf{r}}$ är $\theta$, så vinkeln mellan $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ måste vara $\frac{\pi}{2} - \theta$. Alltså är $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\mathbf{r}}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$. Vinkeln mellan $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ är vidare $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta$, så $\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \cos\theta$. Alltså är

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

På liknande sätt finner vi att

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$