

Uppgift 2.33 d

Vi behöver först härleda additionsformeln för tangens.

Vi har

$$\tan(u + v) = \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

varför tangens för dubbla vinkeln

$$\tan(2v) = \tan(v + v) = \frac{\tan v + \tan v}{1 - \tan v \tan v} = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v}.$$

Ekvationen

$$\tan 2v = 3 \tan v$$

är således ekvivalent med

$$\frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v} = 3 \tan v.$$

Med

$$t \equiv \tan v$$

erhåller vi

$$\frac{2t}{1 - t^2} = 3t$$

som förenklas till

$$t(3t^2 - 1) = 0$$

med lösningarna

$$t \in \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Således är

$$\tan v = 0$$

eller

$$\tan v = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Första ekvationen har lösningarna

$$v = n\pi$$

och andra ekvationen har lösningarna

$$v = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$$

och vi är färdiga.